Sarf Jean-Luc

Intégration dans le temps Newmark

1. **Définir les caractéristiques souhaitées pour un bon algorithme**

Sarf Jean-Luc

Intégration dans le temps : Newmark

2. Expliquer cette page et faire un petit graphique qui résume les conditions de stabilité sur γ et β

$$
\begin{array}{l}
M\ddot{d} + C\dot{d} + Kd = F \\
d(0) = d_0 \\
\dot{d}(0) = v_0
\end{array}
\xrightarrow{\text{Temporal discretization}}
\begin{array}{l}
Ma_{n+1} + Cv_{n+1} + Kd_{n+1} = F_{n+1} \\
d_{n+1} = d_n + \Delta t v_n + \frac{\Delta t^2}{2}\{(1-2\beta)a_n + 2\beta a_{n+1}\} \\
v_{n+1} = v_n + \Delta t\{(1-\gamma)a_n + \gamma a_{n+1}\} \\
d_0,\ v_0 \text{ given}
\end{array}
$$

Modal decomposition ↓ (both)

$$
\begin{array}{l}
\ddot{d} + 2\xi\omega^h\dot{d} + (\omega^h)^2 d = F \\
d(0) = d_0 \\
\dot{d}(0) = v_0
\end{array}
\xrightarrow{\text{Temporal discretization}}
\begin{array}{l}
a_{n+1} + 2\xi\omega^h v_{n+1} + (\omega^h)^2 d_{n+1} = F_{n+1} \\
d_{n+1} = d_n + \Delta t v_n + \frac{\Delta t^2}{2}\{(1-2\beta)a_n + 2\beta a_{n+1}\} \\
v_{n+1} = v_n + \Delta t\{(1-\gamma)a_n + \gamma a_{n+1}\} \\
d_0,\ v_0 \text{ given}
\end{array}
$$

Amortissement de Rayleigh $\quad C = aM + bK$

SDOF $\quad y_{n+1} = Ay_n + L_n \qquad y_n = \begin{Bmatrix} d_n \\ v_n \end{Bmatrix}$

STABILITE

Les conditions de stabilité

1. Stabilité inconditionnelle : $\quad 2\beta \geq \gamma \geq 0{,}5$
2. Stabilité conditionnelle : $\quad \gamma \geq 0{,}5\ ;\ \beta < \gamma/2\ ;$

   condition: $\omega \Delta t \leq \Omega_{crit}$

$$
\Omega_{crit} = \frac{\xi\left(\gamma - \frac{1}{2}\right) + \left[\frac{\gamma}{2} - \beta + \xi^2\left(\gamma - \frac{1}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{\gamma}{2} - \beta\right)}
$$

ξ : taux d’amortissement visqueux ; $\quad \xi = (a/\omega + b\omega)/2$

ω : fréquence propre de l’oscillateur en [rad / sec]

Intégration dans le temps : Newmark

3. Commenter le tableau

Méthode	Type	β	γ	Stabilité	Précision
Trapézoidale (average acceleration)	implicite	1/4	1/2	Inconditionnelle	Δt^2
Accélération lin.	implicite	1/6	1/2	Ω crit = $2\sqrt{3}$	Δt^2
Fox-Goodwin	implicite	1/12	1/2	Ω crit = $\sqrt{6}$	$\Delta t^2 (\Delta t^4)$
Différences centrées	explicite	0	1/2	Ω crit = 2	Δt^2
			>1/2		Δt

4. Que pouvez-vous dire si $\gamma = 0.5$

5. Sans amortissement, que vaut Ω_{crit}

6. Sans amortissement + $\gamma = 0.5$ + β=0, que vaut Ω_{crit}

$$\Omega_{crit} = \frac{\xi(\gamma - \frac{1}{2}) + [\gamma/2 - \beta + \xi^2(\gamma - \frac{1}{2})^2]^{1/2}}{(\gamma/2 - \beta)}$$

$$\xi = (a/\omega + b\omega)/2$$

7. Autres remarques à faire !

8. Je vous donne la définition du rayon spectral et la démonstration pour la condition $\rho(A) < 1$. Je vous demande simplement de m'expliquer la figure de gauche et les deux courbes de la figure de droite

Rappel : le rayon spectral ρ(A) correspond à la valeur absolue de la valeur propre maximum de la matrice A, telle que

$\mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{A}_n \, d_n + \ldots$

Pour info

$$\rho(A) \leq \|A^k\|^{1/k}, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

$\lim_{k \to \infty} A^k = 0$ if and only if $\rho(A) < 1$.

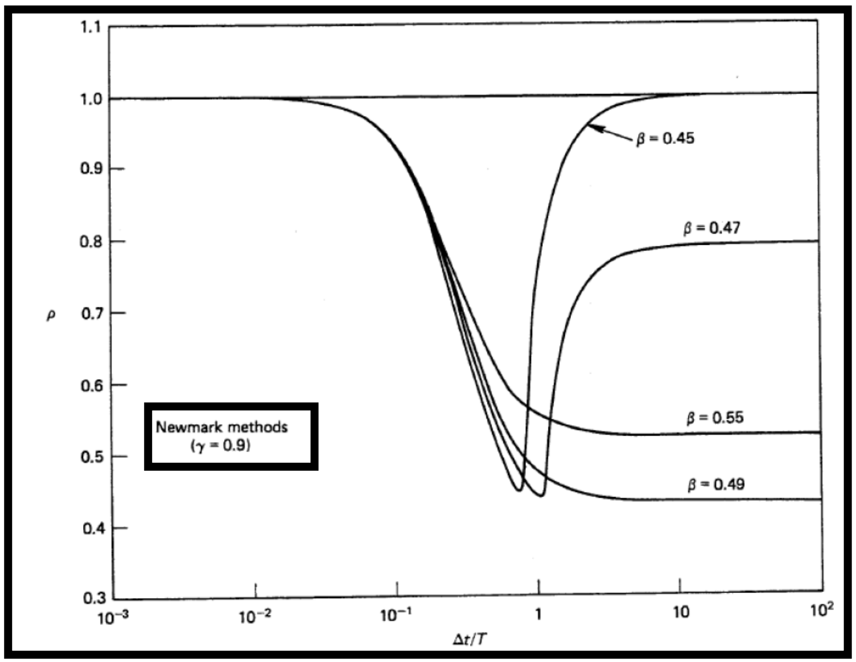
STABILITE

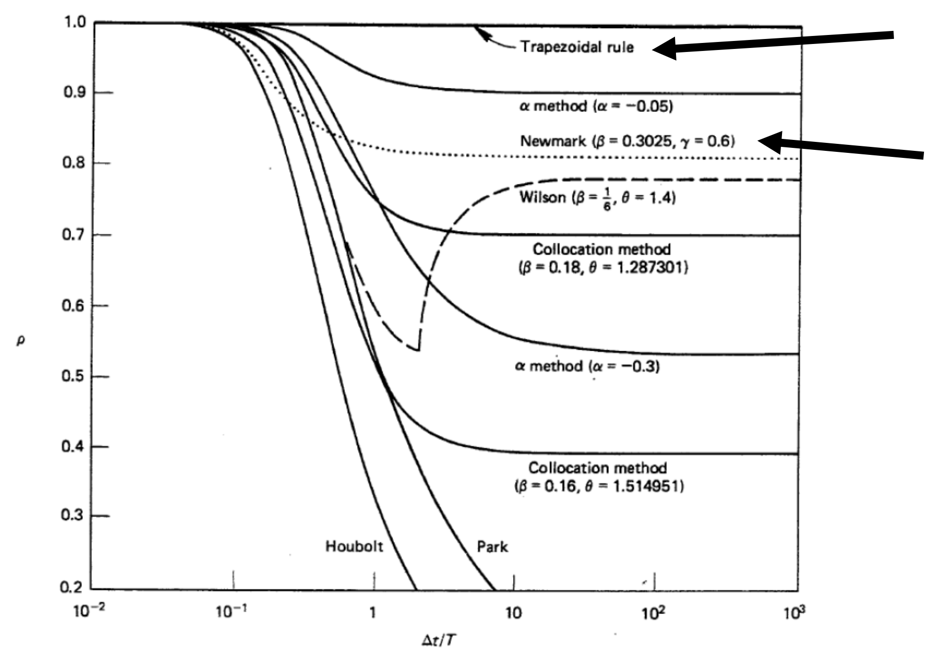
Rayon spectral est donné par : $\rho(\mathbf{A}) = \max_i |\lambda_i(\mathbf{A})|$

$\lambda_i(\mathbf{A})$ **sont les valeurs propres**

La condition de stabilité empêche l'amplification de A^n lorsque n devient grand

$$\rho(\mathbf{A}) \leq 1.$$

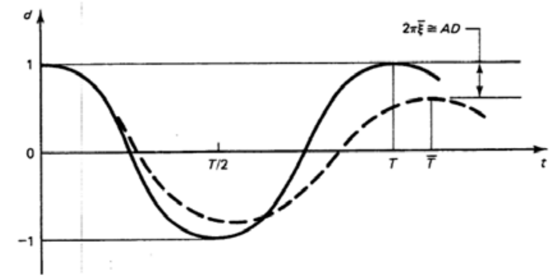




Intégration dans le temps : Newmark et HHT (alpha method)

Après une période et pour $\bar{\xi}$ faible, on obtient

$$AD \cong 2\pi\bar{\xi}$$



9. Expliquer la dispersion et la dissipation numérique pour Newmark et HHT à l'aide des figures suivantes (uniquement les flèches)