

**Corrigé de l'exercice : prise en main du calcul modal à 2DDL**  
**By Jean-Luc SARF**

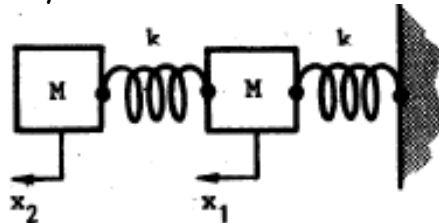
**1 Introduction :**

Cette petite note vous montre simplement ce que vous êtes capable de faire si vous travaillez un peu. Dans le sens que vous preniez un peu de temps pour maîtriser les choses. Il ne faut pas travailler dans le vide et perdre de nombreuses heures. Il faut réfléchir puis agir même si tout est nouveau et que vous avez perdu l'habitude des mathématiques ou autres.

**2 Cas traité :**

Il s'agit de trouver la réponse d'un système à 2DDL (déplacements, vitesses, accélérations) pour des conditions initiales imposées.

La figure suivante montre le système à résoudre :



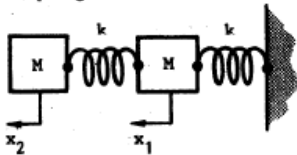
Les données sont les suivantes (avec ou sans unité) :

- Les deux masses sont égales à 1 (Mass = 1 kg,....)
- La rigidité des barres (Truss) vaut 1 ( $k = EA/L$ )
- $d01 = 0$  ,  $v01 = 0$  m/s
- $d02 = 2$  ,  $v02 = 0$  m/s

**3 Bases théoriques :**

La figure suivante donne les fréquences propres et les vecteurs associés

2. Two Equal Masses, Two Equal Springs



$$\frac{(3 - \sqrt{5})^{1/2}}{2^{3/2}\pi} \left(\frac{k}{M}\right)^{1/2}, \quad \frac{(3 + \sqrt{5})^{1/2}}{2^{3/2}\pi} \left(\frac{k}{M}\right)^{1/2}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$$

Le système à résoudre est le suivant (équilibre)

$$M\ddot{x}_1 = -kx_1 + k(x_2 - x_1),$$

$$M\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1).$$

Sous la forme matricielle :

$$[M] \{\ddot{x}\} + [K] \{x\} = 0,$$

Avec

$$[M] = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}, \quad [K] = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}, \quad \{\underline{x}\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

Oscillation libre :

$$\{\underline{x}\} = \{\tilde{\underline{x}}\} \sin \omega t,$$

Où  $\{\tilde{\underline{x}}\}$  est un vecteur indépendant du temps qui représente les modes  
Et en dérivant deux fois, on obtient l'expression suivante :

$$[-\omega^2 [M] + [K]] \{\tilde{\underline{x}}\} = 0$$

Pour trouver  $\omega$ , il faut que le déterminant soit nul :

$$|-\omega^2 [M] + [K]| = 0,$$

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 M + 2k & -k \\ -k & -\omega^2 M + k \end{vmatrix} = 0,$$

$$\omega^4 - \frac{3k}{M} \omega^2 + \frac{k^2}{M^2} = 0.$$

Il s'agit de résoudre une équation « du second degré » en posant par exemple  $Q = \omega^2$  (il s'agira d'une équation du second degré en  $Q$ )

On trouve finalement les deux fréquences  $f_1$  et  $f_2$  :

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{k}{M} \right)^{1/2} \left( \frac{3 \mp \sqrt{5}}{2} \right)^{1/2}$$

Application numérique

$$E_{\text{mod}} := 1 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \quad \text{Aire} := 1 \cdot \text{m}^2 \quad L := 1 \cdot \text{m}$$

$$\text{Mass} := 1 \cdot \text{kg}$$

$$K := \frac{E_{\text{mod}} \cdot \text{Aire}}{L}$$

$$f_1 := \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{K}{\text{Mass}}} \cdot \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}}$$

$$f_2 := \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{K}{\text{Mass}}} \cdot \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}}$$

$$f_1 = 0.098 \cdot \text{sec}^{-1}$$

$$f_2 = 0.258 \cdot \text{sec}^{-1}$$

On obtient les modes associés (vecteur propre) en remplaçant les fréquences naturelles dans l'équation :

$$|-\omega^2 [\mathbf{M}] + [\mathbf{K}]| = 0,$$

$$\{\tilde{\mathbf{X}}\} = \left\{ \begin{matrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{matrix} \right\}_i = \left( \frac{1}{1 + 5^{1/2}}, \frac{1}{2} \right), \left( \frac{1}{1 - 5^{1/2}}, \frac{1}{2} \right), \quad i = 1, 2$$

Pour une vibration dans le 1<sup>er</sup> mode, il faut que (les deux masses bougent simultanément) :

$$\tilde{x}_{21} = \frac{x_2}{x_1} = \frac{1 + 5^{1/2}}{2} > 0$$

Pour une vibration dans le 2<sup>ième</sup> mode, il faut que (les deux masses bougent dans la direction opposée):

$$\tilde{x}_{22} = \frac{x_2}{x_1} = \frac{1 - 5^{1/2}}{2} < 0$$

La réponse totale du système dans le temps est la somme des modes de vibration :

$$x_1 = A_1 \sin(2\pi f_1 t + \phi_1) + A_2 \sin(2\pi f_2 t + \phi_2),$$

$$x_2 = B_1 \sin(2\pi f_1 t + \phi_1) + B_2 \sin(2\pi f_2 t + \phi_2),$$

L'on trouve  $A_1, A_2, B_1, B_2, \phi_1, \phi_2$  avec les conditions initiales.

$A_1, A_2, B_1, B_2$  définissent l'amplitude de la vibration. Pendant l'oscillation libre les ratios  $A_1/B_1$  et  $A_2/B_2$  sont définis par les modes propres :

$$\frac{B_1}{A_1} = \tilde{x}_{21} = \frac{1 + 5^{1/2}}{2} = 1.618,$$

$$\frac{B_2}{A_2} = \tilde{x}_{22} = \frac{1 - 5^{1/2}}{2} = -0.618.$$

Donc si  $A_1, A_2$  ou  $B_1, B_2$ , ou  $B_1, A_2$  ou  $B_2, B_1$  peuvent être trouvés alors les deux autres sont déterminés par le mode propre.. Ces modes sont orthogonaux.

$$MA_1 A_2 + MB_1 B_2 = M(1 - 1) = 0.$$

De manière générale,  $M_i$  est la masse ième masse,  $A_i^k$  est le déplacement modal de la ième masse dans le mode k

$$\sum_{i=1}^n M_i A_i^k A_i^j = 0 \quad j \neq k,$$

Donc en prenant en compte les conditions d'orthogonalité, le système à résoudre devient :

$$x_1 = A \sin(2\pi f_1 t + \phi_1) + B \sin(2\pi f_2 t + \phi_2),$$

$$x_2 = \frac{A(1 + 5^{1/2})}{2} \sin(2\pi f_1 t + \phi_1) + \frac{B(1 - 5^{1/2})}{2} \sin(2\pi f_2 t + \phi_2)$$

#### 4 Résolution du système :

Pour  $t = 0$  sec

$$d_{01} = 0 \cdot m \quad v_{01} = 0 \cdot \frac{m}{\text{sec}} \quad d_{02} = 2 \cdot m \quad v_{02} = 0 \cdot \frac{m}{\text{sec}}$$

On obtient 4 équations :

$$(1) t=0 : d_{01} = 0 \quad A \cdot \sin(\phi_1) + B \cdot \sin(\phi_2) = 0$$

$$(2) t=0 : d_{02} = 2 \quad A \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \sin(\phi_1) + B \cdot \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \sin(\phi_2) = 2$$

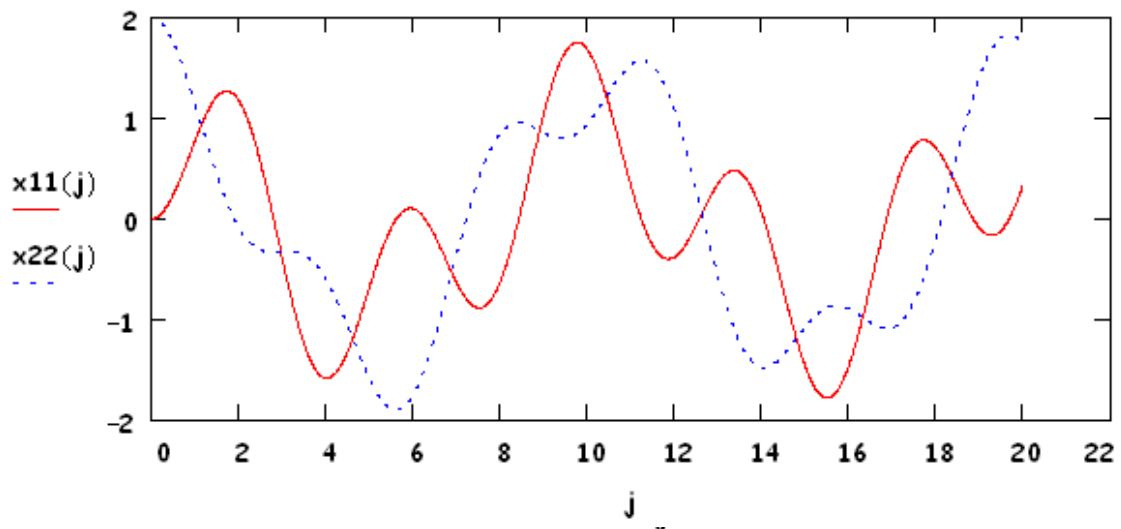
$$(3) t=0 : v_{01} = 0 \quad 2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot A \cdot \cos(\phi_1) + 2 \cdot \pi \cdot f_2 \cdot B \cdot \cos(\phi_2) = 0$$

$$(4) t=0 : v_{02} = 2 \quad 2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot A \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cos(\phi_1) + 2 \cdot \pi \cdot f_2 \cdot B \cdot \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \cos(\phi_2) = 0$$

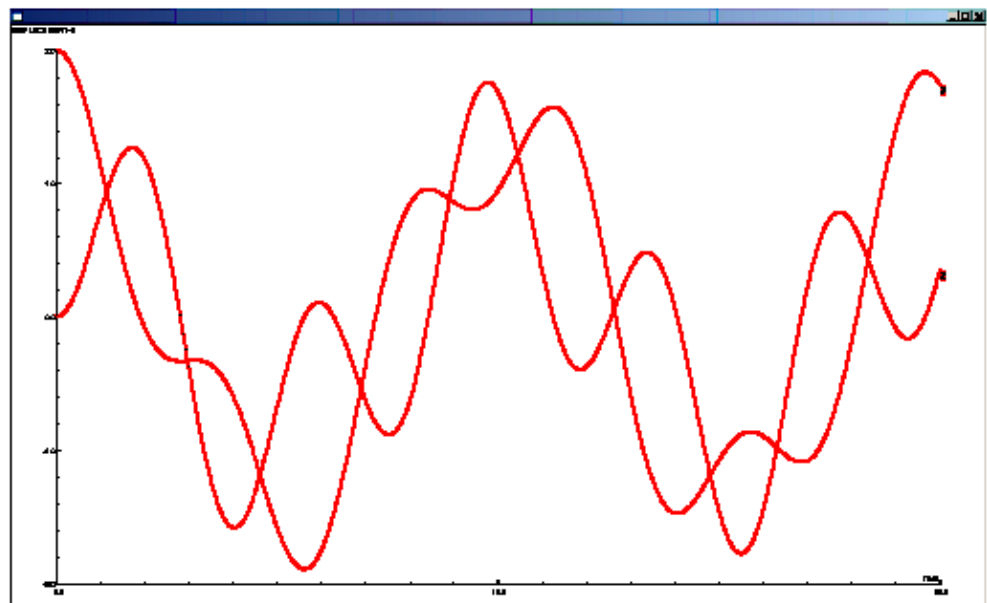
On trouve les inconnus très facilement en multipliant une ligne par un coefficient approprié et ensuite on peut soustraire deux équations. Par exemple, pour trouver  $\phi_1$  et  $\phi_2$ , on prend les équations 3 et 4.

**(3) et (4) donnent :**  $\phi_1 := \frac{\pi}{2}$        $\phi_2 := -\frac{\pi}{2}$     **car**     $A \neq 0$      $B \neq 0$

**(1) et (2) avec  $\phi_1$  et  $\phi_2$  donnent :**  $A := \frac{2}{\sqrt{5}}$        $B := \frac{2}{\sqrt{5}}$



### Calculs ZSOIL



## 5 On m'a posé la question en cours : comment on trouve $\omega$ , donc f, donc T pour les différents modes ?

Maintenant vous pouvez répondre vous-même (je vous donne néanmoins la justification ci-après).

### PROPRIETES DES VECTEURS MODAUX

Soit  $\tilde{X}_i$ , le vecteur modal correspondant à la pulsation  $\omega_i$ . On trouve  $\tilde{X}_i$  en résolvant le système :

$$(\mathbf{K} - \mathbf{M} \omega_i^2) \tilde{X}_i = \mathbf{0} \quad (\text{A1})$$

Où K et M sont les matrices de raideur et de masse (dimension nxn)

$$\omega_i^2 = \frac{\tilde{X}_i^t \cdot \mathbf{K} \cdot \tilde{X}_i}{\tilde{X}_i^t \cdot \mathbf{M} \cdot \tilde{X}_i} \quad (\text{A2})$$

On obtient trivialement cette expression en multipliant à gauche la relation (A1) par le vecteur  $\tilde{X}_i^t$  transposé. On développe ensuite en utilisant les propriétés des opérations matricielles.

On peut aussi démontrer que

$$\tilde{X}_i^t \cdot \mathbf{K} \cdot \tilde{X}_j = 0 \text{ et } \tilde{X}_i^t \cdot \mathbf{M} \cdot \tilde{X}_j = 0 \text{ si } i \neq j \quad (\text{A3})$$

On verra dans la suite du cours comment on peut approcher le calcul des périodes propres par la méthode de RAYLEIGH, etc....

**Application numérique de (A2) pour le premier mode :**

$$\omega_1^2 = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 1 + \sqrt{5} \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + \sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 + \sqrt{5} \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + \sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}} = \frac{2 - 2 \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2}{1 + \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2} = 0.382$$

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2 \cdot \pi} = 0.098$$

Dans le cas général, la solution est obtenue en superposant les mouvements selon les n modes de vibration

$$U(t) = \sum_{J=1}^n A_J \tilde{X}_J \sin(\omega_J t + \phi_J)$$

## 6 Pour les utilisateurs de Mathcad, Matlab, etc...

On peut aussi résoudre le système d'équation sans tenir compte de l'orthogonalité et vérifier ensuite que les propriétés sont bien respectées

$$k := 1 \quad M := 1 \quad f1 := \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{M}} \cdot \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}} \quad f2 := \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{M}} \cdot \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}}$$

$$A1 := 0.4 \quad B1 := 0.8 \quad A2 := 0.3 \quad B2 := 0.3 \quad \phi1 := \frac{\pi}{6} \quad \phi2 := -\frac{\pi}{6}$$

Given

$$A1 \cdot \sin(\phi1) + A2 \cdot \sin(\phi2) = 0$$

$$B1 \cdot \sin(\phi1) + B2 \cdot \sin(\phi2) = 2$$

$$2 \cdot \pi \cdot f1 \cdot A1 \cdot \cos(\phi1) + 2 \cdot \pi \cdot f2 \cdot A2 \cdot \cos(\phi2) = 0$$

$$2 \cdot \pi \cdot f1 \cdot B1 \cdot \cos(\phi1) + 2 \cdot \pi \cdot f2 \cdot B2 \cdot \cos(\phi2) = 0$$

$$-4 \cdot \pi^2 \cdot f1^2 \cdot A1 \cdot \sin(\phi1) - 4 \cdot \pi^2 \cdot f2^2 \cdot A2 \cdot \sin(\phi2) = 2$$

$$-4 \cdot \pi^2 \cdot f1^2 \cdot B1 \cdot \sin(\phi1) - 4 \cdot \pi^2 \cdot f2^2 \cdot B2 \cdot \sin(\phi2) = -2$$

$$RES := \text{Miner}(A1, A2, B1, B2, \phi1, \phi2)$$

$$A1 := RES_0 \quad A2 := RES_1 \quad B1 := RES_2 \quad B2 := RES_3$$

$$\phi1 := RES_4 \quad \phi2 := RES_5 \quad \frac{B1}{A1} = 1.618 \quad \frac{B2}{A2} = -0.618$$

$$x1(t) := A1 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f1 \cdot t + \phi1) + A2 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f2 \cdot t + \phi2)$$

$$x2(t) := B1 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f1 \cdot t + \phi1) + B2 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f2 \cdot t + \phi2)$$

$$a1(t) := \frac{d^2}{dt^2} x1(t) \quad a1(0) = 2 \quad a2(t) := \frac{d^2}{dt^2} x2(t) \quad a2(0) = -2$$

$$M\ddot{x}_1 = -kx_1 + k(x_2 - x_1),$$

$$M\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1).$$

$$RES = \begin{bmatrix} 0.89442719 \\ 0.89442719 \\ 1.4472136 \\ -0.5527864 \\ 1.57079633 \\ -1.57079633 \end{bmatrix}$$

$$\frac{B1}{A1} = \tilde{x}_{21} = \frac{1 + 5^{1/2}}{2} = 1.618,$$

$$\frac{B2}{A2} = \tilde{x}_{22} = \frac{1 - 5^{1/2}}{2} = -0.618.$$

$$j := 0, 0.01 \dots 20$$

